ממן 11 אלגוריתמים

# שאלה 1

זוהי למעשה בעיית זיווג יציב בין קבוצת הספינות לקבוצת הנמלים. ה"תיעדוף" של כל ספינה יהיה לפי סדר הופעת כל נמל בלו"ז שלה. למשל, בדוגמה בתרגיל, הספינה הראשונה תעדיף את על וגם הספינה השנייה. כל נמל ידרג את הספינות שמגיעות אליו קודם מתחת הספינות שמגיעות אליו מאוחר יותר. כלומר וגם מעדיפים את הספינה השנייה על הראשונה. הזיווג מתבצע כך שהנמלים אקטיביים (הם ה"גברים" באלגוריתם לזיווג יציב).

כל ספינה תעצור ותסיים את הלוז שלה בנמל שזווג לה. נוכיח שהתנאי שאף נמל לא מכיל שתי ספינות באותו יום מתקיים:

נניח בשלילה שספינה s עוצרת ומסיימת בנמל p וספינה s' מגיעה לנמל p אחריה. נניח שs’ מזווגת לp’. S' חייבת לעבור בp’ אחרי p, אחרת היא לא מגיעה לp כי הוא עוצרת לפניו. כלומר s' מעדיפה את p על p'. כמו כן, היא מגיעה לp אחרי s לכן p מעדיף את s' על s. כלומר זהו זיווג לא יציב, בסתירה לכך שבספר הוכח שאלגוריתם גייל שייפלי עובד.

כלומר, קיים אלגוריתם (והוא אלגוריתם זיווג מקבוצת הנמלים לקבוצת הספינות, כך שהתיעדוף הוא כמצוין לעיל), המקצץ את הלו"ז. מכיוון שהוכח שאלגוריתם הזיווג עובד, גם אלגוריתם זה מקיים את הטענות הנדרשות. כלומר תמיד אפשר למצוא קבוצת לו"ז על ידי האלגוריתם הזה.

# שאלה 2

בשלב הראשון נחלק את הגרף לרכיבים הקשירים שלו, ניתן לעשות זאת ב כפי שמתואר בספר. נתייחס לכל תת גרף קשיר כגרף בפני עצמו וננסה לכוון אותו, אם האלגוריתם ייכשל באחד מהרכיבים נחליט שהגרף כולו לא ניתן לכיוון בדרגת כניסה 0 לכל קודקוד. לכל גרף קשיר עם m קודקודים, נספור את כמות הקשתות, ואם יש פחות מm נחזיר שאין דרך לכוון את הגרף כי לכל קודקוד חייבת להיות לפחות קשת אחת. אם כמות הקשתות גדולה או שווה לm, אז חייב להיות בגרף מעגל. נכוון את הקשתות במעגל לאותו כיוון כך שגם בגרף המכוון הוא יהיה מעגל, ואז לכל קודקוד במעגל דרגת הכניסה לפחות 0, נסמן אותם כ"מסופקים". כעט לכל קשת שיוצאת מקודקוד מסופק לקודקוד לא מסופק נכוון אותה לכיוון הקודקוד הלא מסופק, כך שהוא יהפוך למסופק ונמשיך כך עד שכל הקודקודים יהיו מסופקים (וזה יקרה כי הגרף הוא רכיב קשיר). זמן הריצה הוא כי עוברים על כל קשת פעם אחת לכן סה"כ זמן הריצה הוא .

# שאלה 3

תהי נוסחת 2CNF. נגדיר גרף כאשר לכל משתנה בנוסחה יש שני צמתים . i ייצג שהמשתנה מקבל ערך אמת ו שהמשתנה מקבל ערך שקר.

שלב 1:

לכל כאשר ליטרלים, נמתח את הקשת ואת הקשת . קשתות אלו מייצגות את הקשרים ו- .

שלב 2:

נמצא את כל הרכיבים הקשירים היטב בגרף שנוצר. נצמצם כל רכיב כזה לצומת יחידה, ונזכור את רשימת הליטרלים שכל צומת כזו מתארת. למעשה כל רכיב כזה משמעותו שאם הנוסחה מסופקת, אז לכל הליטרלים בו אותו ערך אמת.

שלב 3:

נבחין כי בגרף שנוצר אין אף רכיב קשיר היטב, אחרת קבוצת הרכיבים שהוא מורכב ממנה הייתה רכיב קשיר בעצמה ומצטמצמת לצומת יחידה בשלב 2. לכן גם אין מעגלים בגרף- כי כל מעגל הוא רכיב קשיר היטב. כלומר ניתן לסדר טופולוגית את הגרף. נעשה זאת.

שלב 4:

נעבור על הסידור הטופולוגי של הגרף מהסוף להתחלה.

לכל משתנה :

אם הצומת מופיעה לפני הצומת , יקבל ערך שקר. אם הצומת מופיעה אחרי הצומת בסדר הטיפולוגי, יקבל ערך אמת. אם i ו מופיעות באותו רכיב קשיר היטב (כלומר, באותה רמה בסדר הטיפולוגי), האלגוריתם מחזיר שאין פתרון.

**הוכחת נכונות:**

נראה שאם האלגוריתם מחזיר הצבה (כלומר לא מחזיר שאין כזו) אז היא מספקת את הנוסחה, ושאם הוא לא מחזיר הצבה אז הנוסחה לא ספיקה.

נניח שהאלגוריתם מחזיר הצבה. נניח בשלילה שההצבה לא מספקת כלומר קיים שלא מסופק, כלומר . מהפסוקית הזו מתקבלים הקשרים . לכן, לפי ההגדרה של סידור טיפולוגי כאשר מייצג את הרמה של X בסידור הטיפולוגי (רמה נמוכה יותר = יותר גבוה בסידור = יש ממנו מסלולים ליותר דברים). לפי שלב 4 ומכיוון שהליטרלים קיבלו ערך F,

, . סה"כ קיבלנו וזו סתירה לכן ההצבה מספקת את הנוסחה.

אם האלגוריתם לא מחזיר הצבה, אז לפי שלב 4 שהוא המצב היחיד בו האלגוריתם יכול להחזיר שאין הצבה, קיים משתנה כך ש נמצאים באותו רכיב קשיר היטב. מכך נובע שקיים מסלול מ ל כלומר וגם קיים מסלול מ ל כלומר . כלומר וזו סתירה. כל ההיסקים הלוגיים שקיימים בגרף נובעים מהנוסחה, ואם נובעת מנוסחה סתירה אז היא לא ספיקה. כלומר, הנוסחה אינה ספיקה וגם כאן האלגוריתם מחזיר תשובה נכונה.

**זמן ריצה:**

נמצא זמן ריצה של כל שלב.

שלב 1: עוברים על הנוסחה פעם אחת ובונים גרף עם מספר קשתות שווה ל2 כפול מספר הפסוקיות, כלומר זמן הריצה הוא O(n). תלוי במימוש של הגרף בזיכרון, זה יכול לקחת גם .

שלב 2: לפי הספר, ניתן לבצע את זה בזמן O(n).

שלב 3: לפי הספר ניתן לעשות זאת בזמן

שלב 4: עוברים עבור כל משתנה (n) על כל הצמתים בגרף (n), כלומר זמן ריצה .

לכן זמן הריצה הכולל הוא .

# שאלה 4

נבצע רדוקציה של הגרף G=(V,E) לגרף G’=(V’,E’) המוגדר כך:

לכל נגדיר . לכל קשת , אם אז ניצור את הקשתות . אחרת, ניצור את הקשתות . כלומר, הגרף G’ הוא שלושה העתקים של G המסומנים 1 2 ו3. בכל פעם שעוברים לצומת בקבוצת העדיפות עולים רמה (מ1 ל2 או מ2 ל3). כלומר הדרך היחידה להגיע לגרף 3 היא לעבור פעמיים במסלול בצמתים מועדפות. לכן כדי למצוא מסלול המגיע מs לt דרך 2 קודקודי עדיפות בG נחפש מסלול המגיע מ ל, ומסלול זה כאשר "נשטח" אותו לG יקיים את הדרישה ויעבור בשני קודקודי עדיפות.

*זמן הריצה הוא כי ברור שאת בניית G’ ניתן לבצע ב ואת החיפוש בG’ ניתן לבצע בחיפוש לרוחב כפי שהוצג בספר בזמן .*